

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*На правах рукописи*

ВИКУЛИНА Юлия Игоревна

ЭФФЕКТ ПОВЕРХНОСТНЫХ И МЕЖФАЗНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В  
ДЕФОРМИРУЕМОМ ТЕЛЕ С ПЛОСКОЙ И РЕЛЬЕФНОЙ  
ПОВЕРХНОСТЬЮ

01.02.04 – механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург  
2014

Работа выполнена в Санкт-Петербургском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор ГРЕКОВ Михаил Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор КРИВЦОВ Антон Мирославович,  
Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет,  
заведующий кафедрой теоретической механики

доктор физико-математических наук,  
профессор РОМАНОВ Алексей Евгеньевич,  
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе  
Российской академии наук,  
ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное Государственное Бюджетное  
Учреждение Науки «Институт Проблем  
Машиноведения РАН» (ИПМаш РАН)

Защита состоится 2 октября 2014 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д212.232.30 на базе Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., 28, математико-механический факультет, ауд. 405.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9 и на сайте [http://spbu.ru/disser2/disser/Vikulina.\\_Dissert.pdf](http://spbu.ru/disser2/disser/Vikulina._Dissert.pdf).

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 201\_\_ г.

Учёный секретарь диссертационного совета  
доктор физико-математических наук



Кустова Е. В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Развитие нанотехнологий и применение наноматериалов (наноплёнок, нанопроволок, нанотрубок, наночастиц и др.) привели к всесторонним исследованиям свойств этих материалов, а также свойств поверхностных и межфазных наноструктур. Поверхностные напряжения — одна из главных причин экстраординарных механических свойств наноструктур и наноматериалов. В классической теории упругости влияние поверхностных напряжений на состояние идеально упругого тела не учитывается на макроуровне, поскольку это влияние распространяется только на несколько приповерхностных слоёв атомов и на макромасштабах становится практически незначительным по сравнению с влиянием других нагрузок. Однако на субмикронных уровнях даже в твёрдых телах доминирующими становятся квантовые и поверхностные эффекты, которые оказывают значительное влияние на механические и электрические свойства наноматериалов. Многочисленные теоретические исследования в рамках континуальной механики, основанные на использовании обобщённой теории упругости, которая включает классическую теорию для основного объёма материала и поверхностную теорию упругости для поверхностей и границ раздела, показали, что именно учёт поверхностных напряжений позволяет адекватно описать, например, размерный эффект, наблюдаемый в экспериментах над различными нанообъектами. Состояние поверхности во многих микроэлектронных и оптических устройствах имеет первостепенное значение, особенно на наноструктурном уровне. Не меньшее значение имеет состояние межзёрненной границы в кристаллических материалах. В связи с этим, разработка и развитие методов решения соответствующих краевых задач на наномасштабном уровне и анализ наноэффектов являются актуальными.

**Цель** данной работы состоит в исследовании на наномасштабном уровне эффекта поверхностных напряжений в упругом теле с плоской и рельефной поверхностью, а также межфазных напряжений в двухкомпонентном теле с рельефной поверхностью.

**Результаты, выносимые на защиту:**

- решение задачи определения напряжённо-деформированного состояния упругого полупространства с плоской поверхностью в условиях плоской деформации при действии поверхностных напряжений, возникших в результате изменения поверхностной нагрузки в нанометровом диапазоне, и напряжений на бесконечности;
- решение задачи определения напряжённо-деформированного состояния упругого полупространства с нанометровым рельефом поверхности в условиях плоской деформации при действии поверхностных напряжений, внешней нагрузки и напряжений на бесконечности;
- решение задачи определения напряжённо-деформированного состояния двухкомпонентного упругого пространства с нанометровым рельефом поверхности раздела в условиях плоской деформации при наличии межфазных напряжений и действии напряжений на бесконечности;
- исследование влияния поверхностных и межфазных напряжений на напряжённое состояние внешней границы и границы раздела двух упругих сред в зависимости от геометрических и физических параметров задачи.

**Методы исследования.** При выполнении диссертационной работы использовались различные аналитические методы: методы теории аналитических функций, методы математической физики, метод возмущений границы раздела. Численные результаты и графические построения получены при помощи системы компьютерной алгебры MAPLE.

**Достоверность результатов** обеспечивается корректностью постановки задач и математических методов, использованных в решении рассмотренных задач. Полученные в работе результаты качественно согласуются с результатами решений аналогичных задач наномеханики, рассмотренных разными авторами при исследовании эффекта поверхностных напряжений. Существование выявленного размерного эффекта было установлено в ряде экспериментальных и теоретических работ.

**Научная новизна:**

- разработан новый подход к решению ряда краевых двумерных задач, постановка которых основана на определяющих соотношениях объёмной и поверхностной теорий упругости. Метод аналитического решения рассмотренных задач состоит в построении однотипных гиперсингулярных интегральных уравнений;
- впервые получено точное решение задачи о деформации упругой полуплоскости при действии произвольной периодической внешней нагрузки и поверхностного напряжения;
- разработан метод возмущений при решении двумерных задач для упругих областей с наноразмерным рельефом внешней или межфазной поверхности. Построен алгоритм нахождения любого приближения и метод точного решения полученного для каждого приближения однотипного гиперсингулярного интегрального уравнения в случае периодического искривления поверхности;
- проанализирован размерный эффект, который связан с наличием поверхностных напряжений и проявляется в зависимости напряжённого состояния от периода изменения нагрузки, а также от периода искривления поверхности и интерфейса.

**Теоретическая и практическая ценность.** Предложенный в работе метод решения задач с поверхностными и межфазными напряжениями, приводящий к решению гиперсингулярного интегрального уравнения, может быть распространён на многие аналогичные двумерные задачи, например, задачи для плёночного упругого покрытия при учёте поверхностных напряжений на внешней поверхности и межфазных — на интерфейсе. Результаты данной работы позволяют дать теоретическое объяснение уникальных механических свойств наноматериалов и наноструктур. Эти результаты могут быть использованы для оценки работоспособности оптических и электронных устройств, поверхности которых имеют дефекты нанометрового размера. Обнаруженные эффекты, связанные с учётом поверхностных напряжений, представляются существенными для дальнейшего развития физической мезомеханики, одним из направлений которой является описание процессов, происходящих при переходе от мезомасштабных уровней к нанометровым. Найденные решения можно также использовать для оценки точности и достоверности результатов, полученных численными методами и с помощью компьютерного моделирования.

**Апробация результатов исследования.** Результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры вычислительных методов механики деформируемого твёрдого тела, на научном семинаре кафедры математики Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна, а также на 8 научных конференциях: XLI, XLII, XLIII, XLIV международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (Санкт-Петербург, 2010, 2011, 2012, 2013); международная конференция по механике «Шестые Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 2012);

международная конференция по механике «The 8th European Solid Mechanics Conference» (Грац, Австрия, 2012); международная научная конференция «Современные проблемы механики деформируемого твёрдого тела, дифференциальных и интегральных уравнений» (Одесса, Украина, 2013); XXI Петербургские чтения по проблемам прочности (Санкт-Петербург, 2014).

Результаты работы получены при проведении исследований по проектам РФФИ (гранты № 11-01-00230, № 12-08-31392, № 14-01-00260) и НИР СПбГУ № 9.37.129.2011.

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 10 работ, в том числе 2 статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК. Список публикаций приведён в конце автореферата.

В совместных исследованиях Грекову М. А. принадлежит постановка задачи, общая схема решений и консультации по различным вопросам, связанным с решением задач. Костырко С. А. принадлежит постановка соответствующих задач и обсуждение путей реализации решений. Викулиной Ю. И. принадлежит реализация предложенного научным руководителем метода, получение решения для рассмотренных задач в явном виде, составление компьютерных программ, графические представления полученных результатов и их анализ.

**Структура и объём работы.** Работа состоит из введения, трёх глав и заключения, содержит 85 страниц, 18 рисунков, 1 таблицу, список литературы содержит 50 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, приведён краткий исторический обзор по исследуемой тематике, сформулированы цели и задачи работы, изложена методика исследования, перечислены полученные в работе новые результаты, их практическая ценность и основные положения, выносимые на защиту. В конце введения приводится краткое содержание диссертации.

**Глава 1** посвящена определению напряжённо-деформированного состояния упругого полупространства с плоской поверхностью в условиях плоской деформации при действии напряжений на бесконечности, поверхностных напряжений и внешней нагрузки в нанометровом диапазоне изменения.

В начале главы излагаются основные положения поверхностной теории упругости Гёртина — Мёрдока, приводится формулировка обобщенного закона Лапласа — Юнга и рассматривается возможность их применения для решения краевых задач.

Рассматривается изотропное и однородное полупространство, плоская поверхность которого находится под действием внешней нагрузки  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  в условиях плоской деформации, и принимается в расчёт действие поверхностных напряжений  $\sigma_{11}^s$  на границе. Задача сводится к соответствующей двумерной задаче о деформации упругой полуплоскости  $\Omega$  с прямолинейной границей  $\Gamma$  (рис. 1). Считается, что упругие свойства границы  $\Gamma$  отличаются от упругих свойств полуплоскости. Согласно обобщённому закону Лапласа — Юнга [1] граничные условия в случае плоской задачи записываются в виде [2]:

$$\sigma_{22}(z) - i\sigma_{12}(z) + i\frac{\partial\sigma_{11}^s}{\partial x_1} = -i(p_1 + ip_2), \quad z = x_1 + ix_2, \quad z \in \Gamma, \quad (1)$$

где  $\sigma_{11}^s$  — поверхностное напряжение.

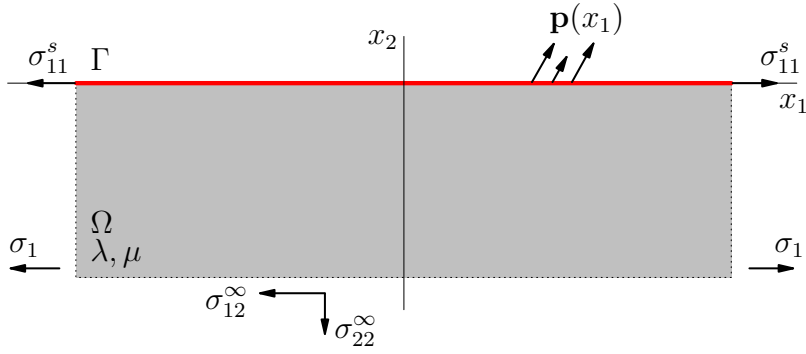


Рис. 1. Модель полуплоскости под нагрузкой

На бесконечности

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} (\sigma_{22} - i\sigma_{12}) = -\frac{iP}{a}, \quad \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \sigma_{11} = \sigma_1, \quad \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \omega = \omega^\infty, \quad z \in \Omega, \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты напряжений в системе координат  $x_1, x_2$ ;  $\omega$  — угол поворота материальной частицы. Кроме того, выполняется условие идеального контакта поверхности и объёма (непрерывность перемещений), которое в деформационной форме имеет вид

$$\varepsilon_{11}(x_1) = \varepsilon_{11}^s(x_1), \quad x_2 = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon_{11}(x_1)$  и  $\varepsilon_{11}^s(x_1)$  — деформации объёма и поверхности соответственно.

Из определяющих соотношений поверхностной теории упругости Гёртина — Мёрдока, объёмной теории упругости и условия (3) выводится уравнение, связывающее неизвестное поверхностное напряжение и соответствующую компоненту деформации  $\varepsilon_{11}$  основного материала на границе:

$$\sigma_{11}^s(x_1) = \gamma_0 + (2\mu_s + \lambda_s)\varepsilon_{11}(x_1), \quad (4)$$

где  $\gamma_0$  — остаточное поверхностное напряжение в недеформированном состоянии;  $\lambda_s, \mu_s$  — модули упругости поверхности.

Связь вектора напряжений  $\sigma_n = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$  в локальной системе координат  $n, t$  и вектора перемещений  $u = u_1 + iu_2$  в системе координат  $x_1, x_2$  с комплексными потенциалами Гурса — Колосова  $\Phi$  и  $\Upsilon$ , согласно [3], выражается соотношениями:

$$\sigma_n = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \left( \Upsilon(\bar{z}) + \overline{\Phi(z)} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \right) e^{-2i\alpha}, \quad (5)$$

$$-2\mu \frac{du}{dz} = -\varkappa \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \left( \Upsilon(\bar{z}) + \overline{\Phi(z)} - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \right) e^{-2i\alpha}, \quad z \in \Omega, \quad (6)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига,  $\varkappa = 3 - 4\nu$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\alpha$  — угол наклона площадки с нормалью  $n$  к оси  $x_1$ .

Переходя в (5) к пределу при  $z \rightarrow \Gamma$ ,  $\alpha = 0$ , с учётом граничного условия (1) приходим к задаче Римана — Гильберта о скачке функции  $\Theta$ , голоморфной вне  $\Gamma$ :

$$\Theta^+(x_1) - \Theta^-(x_1) = i\sigma_{11}^s(x_1) + ip(x_1), \quad \Theta = \begin{cases} \Upsilon, & \text{Im } z > 0, \\ \Phi, & \text{Im } z < 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\Theta^\pm(x_1) = \lim_{\text{Im } z \rightarrow \pm 0} \Theta(z)$ .

Решение задачи (7) имеет вид [4]:

$$\Theta(z) = \Theta_k(z) + \Theta_u(z) + C, \quad z \notin \Gamma, \quad (8)$$

$$\Theta_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ip(t)}{t-z} dt, \quad \Theta_u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\sigma_{11}^{s'}(t)}{t-z} dt. \quad (9)$$

На основании полученных соотношений выводится уравнение, связывающее неизвестное поверхностное напряжение  $\sigma_{11}^s$  с комплексными потенциалами

$$\sigma_{11}^s = \gamma_0 + (2\mu_s + \lambda_s) \frac{du_1}{dx_1} = \gamma_0 + M \operatorname{Re} \{ \varkappa \Phi^- + \Upsilon^+ \}, \quad M = \frac{2\mu_s + \lambda_s}{2\mu}. \quad (10)$$

Используя формулы Сохоцкого – Племеля, получаем гиперсингулярное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{s'}(x_1) - \frac{M(\varkappa + 1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_{11}^{s'}(t)}{(t-x_1)^2} dt = \\ = \frac{M(\varkappa - 1)}{2} p_2'(x_1) + \frac{M(\varkappa + 1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_1(t)}{(t-x_1)^2} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Для решения уравнения (11) и получения численных результатов, некоторые из которых приведены на рис. 2 и рис. 3, нагрузка, действующая на границе, полагается периодической, нормальная составляющая описывается чётной непрерывной функцией, а касательная – нечётной, то есть  $p(x)$  представима в виде ряда Фурье:

$$p(x) = p_1(x) + ip_2(x) = \sum_{k=0}^n C_k \sin b_k x + i \sum_{k=0}^n D_k \cos b_k x, \quad (12)$$

где  $b_k = 2\pi k/a$ ,  $a$  – период, здесь и далее  $x \equiv x_1$ .

Тогда неизвестное поверхностное напряжение находим в виде тригонометрического ряда:

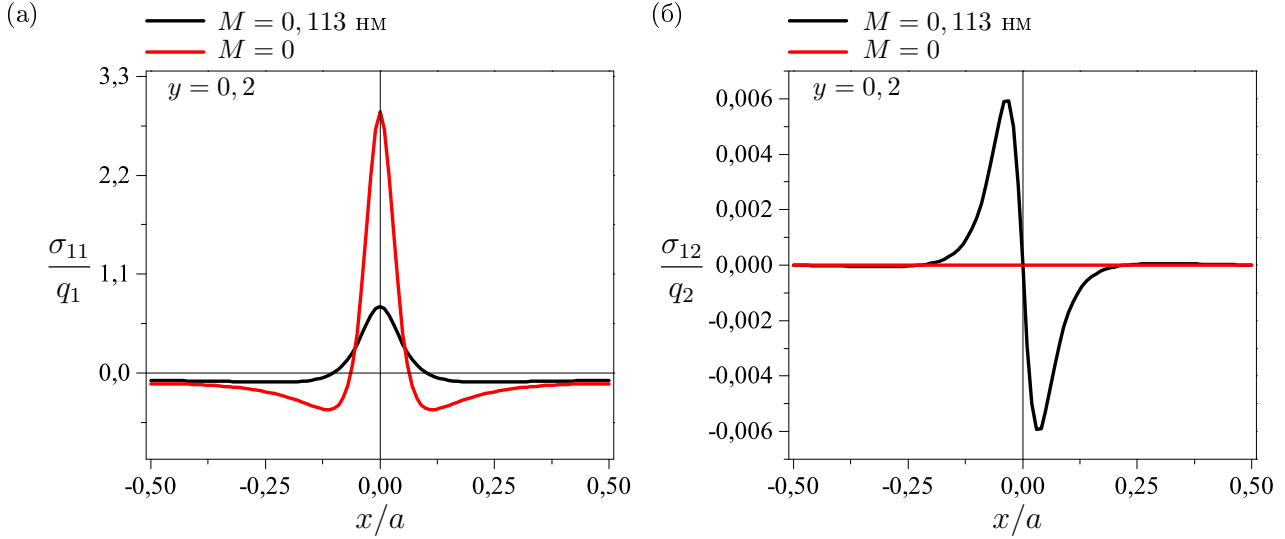
$$\sigma_{11}^s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos b_k x + B_k \sin b_k x). \quad (13)$$

С использованием свойств интегралов типа Коши получены аналитические выражения для неизвестных коэффициентов ряда Фурье (13):

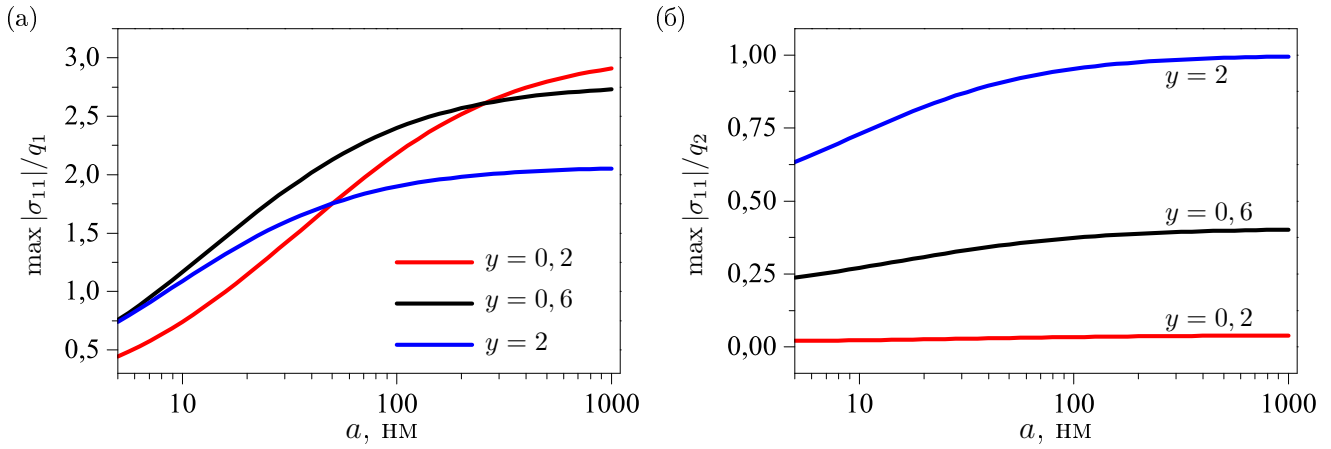
$$\begin{aligned} A_0 = \gamma_0 + M(\varkappa + 1) \frac{\sigma_1}{4}, \quad A_k = \frac{M(C_k(\varkappa + 1) + D_k(\varkappa - 1))}{2 + Mb_k(\varkappa + 1)}, \quad k \geq 1; \\ B_k = 0, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

и найдено точное решение интегрального уравнения (11) в виде

$$\sigma_{11}^s(x) = \gamma_0 + M(\varkappa + 1) \frac{\sigma_1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos b_k x. \quad (15)$$



**Рис. 2.** Распределение продольных напряжений в диапазоне одного периода при действии касательной нагрузки (а) и касательных напряжений при действии нормальной нагрузки (б)



**Рис. 3.** Зависимость максимумов модулей продольных напряжений от периода действия касательной (а) и нормальной (б) нагрузки

В результате получены явные выражения для компонент тензора напряжений на границе  $\Gamma$ .

Для численных расчётов и анализа эффекта поверхностных напряжений рассматривается нагрузка, определяемая одним из равенств

$$p_1(x, y) = q_1 \frac{\text{Im } f(x, y)}{\max |\text{Im } f(x, y)|}, \quad p_2(x, y) = q_2 \frac{\text{Re } f(x, y)}{\max |\text{Re } f(x, y)|}, \quad (16)$$

где

$$f(x, y) = -\text{sh}^{-2} \left( y + \frac{i\pi x}{a} \right), \quad (17)$$

$q_1, q_2$  — постоянные величины, равные максимумам абсолютных значений соответствующих усилий; параметр  $y$  определяет форму кривых. При  $y > 2$  кривые, описывающие действие нагрузки, становятся близкими к синусоидальным. При уменьшении параметра  $y$  можно с помощью данных функций моделировать действие периодической нагрузки, распределённой на участках границы, малых по сравнению с периодом.

Вычислительные эксперименты были проведены для алюминия с характеристиками, взятыми из работы [5],  $\lambda_s = 6,8511 \text{ Н/м}$ ;  $\mu_s = -0,376 \text{ Н/м}$ . В этом случае при  $\mu = 27 \text{ ГПа}$  находим, что коэффициент  $M = 0,113 \text{ нм}$ .



Получены распределения некоторых напряжений в диапазоне одного периода (рис. 2), а также зависимости этих напряжений от периода изменения нагрузки (рис. 3). Проиллюстрирован размерный эффект, который проявляется в зависимости напряжений от размерного параметра — периода изменения нагрузки.

В результате обнаружено, что при фиксированном максимальном значении нагрузки влияние поверхностных напряжений на напряжённое состояние границы становится более значительным с уменьшением участка периода, на котором сосредоточена основная часть нагрузки.

Из рис. 3 видно, что наиболее заметное влияние периода нагрузки на напряжения находится в пределах изменения  $a$  примерно от 1 до 30 нм. При  $a > 100$  нм размерный эффект практически исчезает, и напряжённо-деформированное состояние тела не зависит от поверхностных напряжений.

**Во второй главе 2** приводится решение задачи определения напряжённо-деформированного состояния полупространства со слабо искривлённой границей в условиях плоской деформации при действии поверхностных напряжений, внешней нагрузки и напряжений на бесконечности. Форма поверхности, рассматриваемая в данной задаче, часто встречается на практике. Так, например, согласно работе [6], выход дислокаций на поверхность материала может привести к формированию наноразмерного периодического рельефа.

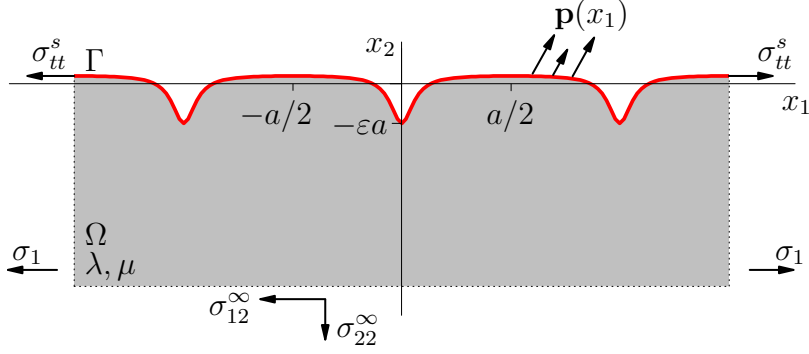
Рассматривается упругая среда, занимающая полупространство, поверхность которого близка к плоской форме и обладает упругими свойствами, отличными от аналогичных свойств объёма. Предполагаем, что среда находится в условиях плоской деформации под действием внешних сил и дополнительных поверхностных напряжений  $\sigma^s$ . Это позволяет перейти к формулировке соответствующей двумерной задачи теории упругости для полубесконечной области [7]  $\Omega = \{z : \text{Im } z < \varepsilon f(x_1), \text{Re } z \in \mathbb{R}^1\}$  в плоскости комплексного переменного  $z = x_1 + ix_2$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  определяется равенством  $\zeta = x_1 + i\varepsilon f(x_1)$  (рис. 4). Здесь  $f(x_1)$  — непрерывно дифференцируемая периодическая функция с периодом  $a$ , удовлетворяющая условиям  $\max |f(x_1)| = a$ ,  $|f'(x_1)| < 1/\varepsilon$ .

В случае криволинейной поверхности закон Лапласа — Юнга для плоской задачи принимает вид

$$\sigma_n(\zeta) = \frac{\sigma_{tt}^s}{r} - i \frac{1}{h} \frac{d\sigma_{tt}^s}{dx_1} + p(\zeta) \equiv t^s(\zeta) + p(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (18)$$

где  $\sigma_n = \sigma_{nn} + i\sigma_{nt}$ ;  $p(\zeta) = p_n(\zeta) + ip_t(\zeta)$ ;  $\sigma_{nn}, \sigma_{nt}$  — нормальное и касательное напряжения в локальной декартовой прямоугольной системе координат  $n, t$  (в уравнении (18) ось  $n$  перпендикулярна  $\Gamma$ );  $p_n, p_t$  — проекции вектора внешней нагрузки на соответствующие оси  $n, t$ ;  $\sigma_{tt}^s$  — поверхностное напряжение; радиус кривизны  $r$  кривой  $\Gamma$  и метрический коэффициент  $h$  (коэффициент Ламе) определяются формулами [8]

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon f'(x_1))^2}}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon f''(x_1)}{(1 + (\varepsilon f'(x_1))^2)^{3/2}}. \quad (19)$$



**Рис. 4.** Двумерная модель упругого тела со слабо искривлённой границей

Считаем, что функция  $p$  удовлетворяет условию Гёльдера всюду на  $\Gamma$  и

$$p(\zeta) = p(\zeta + a), \quad \int_{\zeta-a/2}^{\zeta+a/2} p(\tau) d\tau = -iP, \quad P = P_1 + iP_2. \quad (20)$$

Условия на бесконечности аналогичны условиям (2) главы 1.

Для нахождения напряжённо-деформированного состояния тела используются те же соотношения (5) – (6), записанные в виде одной формулы [3]. Следуя методу возмущений [9], комплексные потенциалы и поверхностное напряжение представляем в виде степенных рядов по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Phi_n(z), \quad \Upsilon(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \Upsilon_n(z), \quad \sigma_{tt}^s(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sigma_n^s(\zeta). \quad (21)$$

Затем предельные значения  $\Phi_n^-, \Upsilon_n^+$  функций  $\Phi_n, \Upsilon_n$  и функции  $p, \sigma_n^s$  на  $\Gamma$  раскладываются в соответствующие ряды Тейлора в окрестности прямой  $\text{Im } \zeta = 0$ :

$$\Phi_n^-(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon f(x_1))^m}{m!} \Phi_n^{-(m)}(x_1), \quad p(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon f(x_1))^m}{m!} p^{(m)}(x_1), \quad (22)$$

$$\Upsilon_n^+(\bar{\zeta}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i\varepsilon f(x_1))^m}{m!} \Upsilon_n^{+(m)}(x_1), \quad \sigma_n^s(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\varepsilon f(x_1))^m}{m!} \sigma_n^{s(m)}(x_1). \quad (23)$$

Принимая во внимание разложения (21) – (23) в граничном условии (18), приходим к последовательности краевых задач Римана – Гильберта

$$\Theta_n^+(x_1) - \Theta_n^-(x_1) = i\sigma_n^{s'}(x_1) + F_n(x_1), \quad (24)$$

где  $F_n$  – известная функция, зависящая при  $n > 0$  от всех предыдущих приближений,

$$\Theta_n(z) = \begin{cases} \Upsilon_n(z), & \text{Im } z > 0, \\ \Phi_n(z), & \text{Im } z < 0. \end{cases} \quad (25)$$

Для любого  $n$  получены явные выражения  $F_n$  через известные функции, найденные в предыдущих приближениях.

Решение задачи (24) имеет вид [4]:

$$\Theta_n(z) = \Theta_{nu}(z) + \Theta_{nk}(z) + C, \quad (26)$$

$$\Theta_{nu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\sigma_n^{s'}(t)}{t-z} dt, \quad \Theta_{nk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_n(t)}{t-z} dt.$$

Определяющие соотношения поверхностной и объёмной теории упругости, записанные в локальной системе координат  $n, t$  [1, 10], принимают вид

$$\sigma_{tt}^s = \gamma_0 + (\lambda_s + 2\mu_s)\varepsilon_{tt}^s, \quad \sigma_{33}^s = \gamma_0 + (\lambda_s + \gamma_0)\varepsilon_{tt}^s, \quad (27)$$

$$\sigma_{nn} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{nn} + \lambda\varepsilon_{tt}, \quad \sigma_{tt} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{tt} + \lambda\varepsilon_{nn}, \quad (28)$$

$$\sigma_{nt} = 2\mu\varepsilon_{nt}, \quad \sigma_{33} = \nu(\sigma_{tt} + \sigma_{nn}), \quad (29)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона объёмного материала.

Из условия идеального контакта поверхности с объёмом и соотношений (27) — (28), как и в главе 1, получаем равенство:

$$\sigma_{tt}^s = \gamma_0 + (\lambda_s + 2\mu_s)\varepsilon_{tt}. \quad (30)$$

С учётом разложений (21) — (23) приходим к последовательности уравнений

$$\sigma_n^s(x_1) = V_n(x_1) + M \operatorname{Re} \left\{ \varkappa \Phi_n^-(x_1) + \Upsilon_n^+(x_1) \right\}, \quad M = \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{2\mu}, \quad (31)$$

где функции  $V_n$  зависят только от предыдущих приближений. Приводятся явные выражения для функций  $V_n$  при любом  $n$ .

Используя формулы Сохоцкого — Племелья в уравнении (31), получаем гиперсингулярное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \sigma_n^{s'}(x_1) - \frac{M(\varkappa + 1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_n^{s'}(t)}{(t - x_1)^2} dt = V_n'(x_1) + \\ + \operatorname{Re} \left\{ \frac{M(1 - \varkappa)}{2} F_n'(x_1) - \frac{M(1 + \varkappa)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_n(t)}{(t - x_1)^2} dt \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Заметим, что уравнение (32) по типу совпадает с уравнением (11), полученным в первой главе. Эти уравнения отличаются только правыми частями.

Решение уравнения (32) и задачи в целом строится в первом приближении при отсутствии внешней нагрузки. Некоторые численные результаты приведены на рис. 5 и рис. 6. Нулевому приближению отвечает задача о полуплоскости с прямолинейной границей в однородном поле напряжений  $\sigma_{11} = \sigma_1, \sigma_{22} = 0$ :

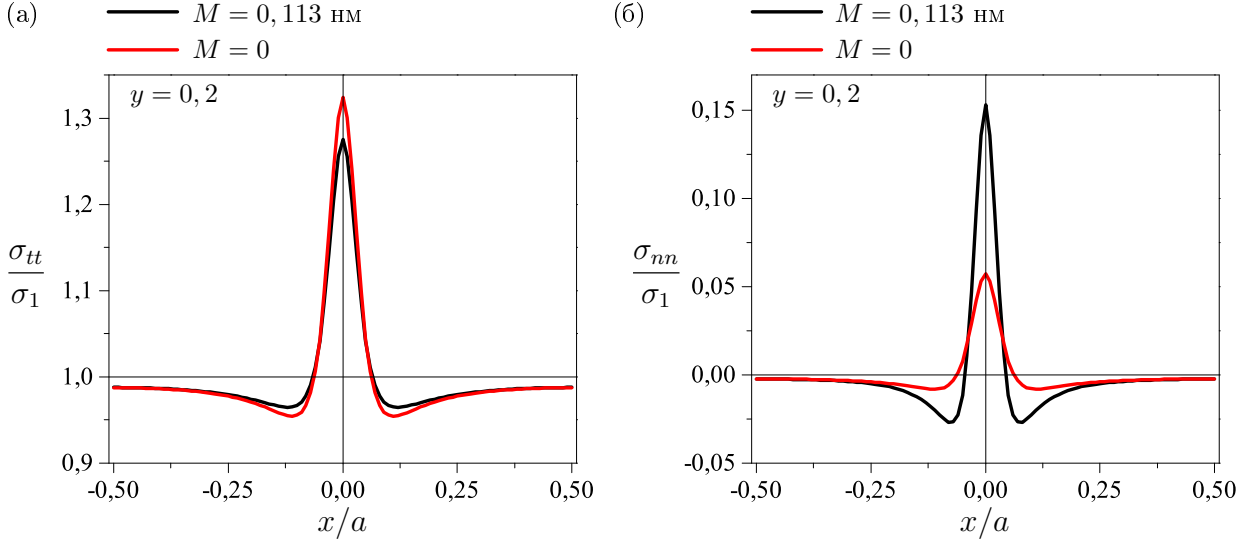
$$\sigma_0^s = \gamma_0 + M(\varkappa + 1) \frac{\sigma_1}{4}. \quad (33)$$

Учитывая периодичность задачи, как и в главе 1, решение уравнения (32) при  $n = 1$  ищем в виде тригонометрического ряда

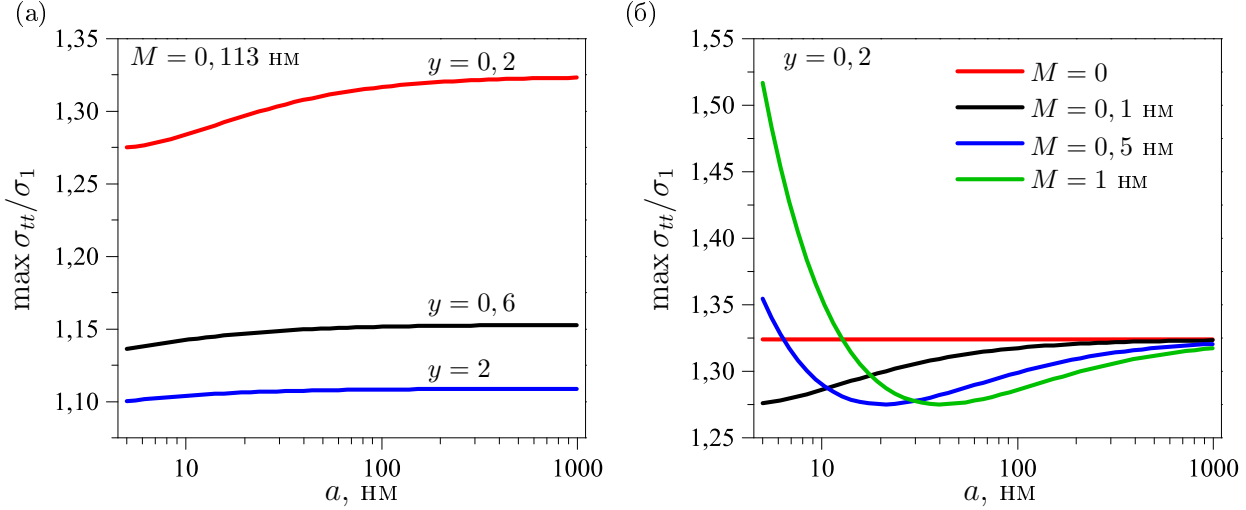
$$\sigma_1^{s'}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin b_k x + B_k \cos b_k x), \quad b_k = 2\pi k/a. \quad (34)$$

Считая, что периодическая функция, описывающая форму поверхности, является чётной, представляем её в виде ряда Фурье по косинусам:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos b_k x, \quad C_k = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(t) \cos b_k t dt. \quad (35)$$



**Рис. 5.** Распределение окружных (а) и нормальных (б) напряжений в пределах одного периода при  $a = 5$  нм



**Рис. 6.** Зависимость максимумов окружных напряжений от периода искривления поверхности при различных значениях параметра  $y$  (а) и параметра  $M$  (б)

Используя свойства интегралов типа Коши, находим явные выражения для коэффициентов  $A_k, B_k$ :

$$A_k = \frac{MC_k b_k^2 (\sigma_1(\varkappa + 1) + b_k \sigma_0^s(\varkappa - 1))}{2 + M b_k(\varkappa + 1)}, \quad B_k = 0, \quad k \geq 0.$$

Таким образом, в первом приближении получено точное аналитическое решение интегрального уравнения (32) для периодической формы поверхности в виде ряда Фурье

$$\sigma_{11}^s(x) = \gamma_0 + M(\varkappa + 1) \frac{\sigma_1}{4} - \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{b_k} \cos b_k x. \quad (36)$$

В целях получения численных результатов рассматривается частный случай, когда на тело не действует внешняя нагрузка, а форма границы задана функцией

$$f(x, y) = \frac{a}{d} \left[ \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi x}{a} - iy \right) \right\} - 1 \right], \quad d = \operatorname{Im} \{ \operatorname{ctg} (iy) \}. \quad (37)$$

Выбор такой функции обусловлен возможностью описать с её помощью различные формы поверхности: варьируя значения параметра  $y$ , можно получить различные формы кривых — от локализованных выступов и выемок до поверхностей, описываемых косинусоидальной функцией.

Численные результаты получены для тех же упругих параметров поверхности и объёма, что и в главе 1. Коэффициент Пуассона  $\nu = 0, 3$ ; малый параметр  $\varepsilon = 0, 1$ ; остаточное напряжение  $\gamma_0$  принято равным нулю.

Из рис. 5а видно, что при учёте поверхностных напряжений изменение окружных напряжений сглаживается, а нормальные напряжения демонстрируют противоположный эффект (рис. 5б). Кроме того, чем меньше радиус кривизны искривления поверхности, тем сильнее проявляется влияние поверхностных напряжений.

С целью выяснения влияния параметра  $M$  на размерный эффект были проведены вычисления для гипотетического сочетания упругих свойств поверхности и полуплоскости при  $M = 0, 5$  нм и  $M = 1$  нм. Результаты вычислений приведены на рис. 6б вместе с кривыми, соответствующими значениям  $M = 0, 1$  нм и  $M = 0$ . Решение, полученное при  $M = 0$  эквивалентно классическому решению, не учитывающему поверхностное напряжение. Из рис. 6б следует, что увеличение параметра  $M$  приводит к немонотонной зависимости окружного напряжения от периода искривления поверхности. Более того, в отличие от реального значения  $M = 0, 113$  нм, с уменьшением периода искривления  $a$  приблизительно от значения 20 нм окружное напряжение возрастает при  $M = 0, 5$  нм и от значения 40 нм — при  $M = 1$  нм.

**В третьей главе** решается задача определения напряжённо-деформированного состояния двухкомпонентного упругого пространства со слабо искривлённой поверхностью раздела в условиях плоской деформации при наличии межфазных напряжений и действии напряжений на бесконечности. В рамках рассматриваемого подхода перемещения непрерывны при переходе через межфазную поверхность, а скачок напряжений связан с существованием межфазных напряжений. Проводится анализ влияния формы искривления поверхности и физических параметров на напряжённое состояние границы раздела сред.

Рассматривается упругое тело, состоящее из двух полупространств со слабо искривлённой межфазной поверхностью. В силу выполнения условий плоской деформации, как и в предыдущих главах, приходим к формулировке двумерной задачи для двухкомпонентной плоскости со слабо искривлённой границей раздела (рис. 7). Считаем, что упругие свойства полуплоскостей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  различны, а на границе раздела  $\Gamma$  действует межфазное напряжение  $\sigma^s$  [10, 11, 12]. Граница  $\Gamma$  определяется равенством  $\Gamma = \{z : z = \zeta \equiv x_1 + i\varepsilon f(x_1)\}$ , где  $\varepsilon \ll 1$ ,  $f(x_1)$  — непрерывная, периодическая и ограниченная функция, то есть  $f(x_1) = f(x_1 + a)$ ,  $|f(x_1)| \leq a$ ,  $|f'(x_1)| \leq M = const$ , где  $a$  — период.

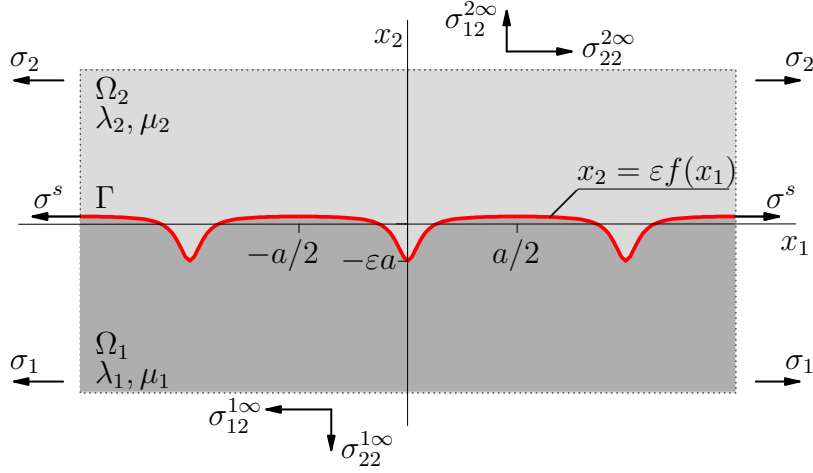
На межфазной границе  $\Gamma$  отсутствуют разрывы перемещений, а скачок напряжений  $\sigma^k$  ( $k = 1, 2$ ) определяется законом Лапласа — Юнга:

$$u^+(\zeta) = u^-(\zeta), \quad \sigma^+(\zeta) - \sigma^-(\zeta) = \Delta\sigma(\zeta) = \frac{\sigma^s}{r} - i \frac{1}{h} \frac{d\sigma^s}{dx_1} \equiv t^s(\zeta), \quad (38)$$

где радиус кривизны границы  $r$  и метрический коэффициент  $h$  определяются равенствами (19).

На бесконечности выполнены условия:

$$\lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} \sigma_{ij}^k(z) = \sigma_{ij}^{k\infty}, \quad \lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} \omega_k(z) = \omega_k^\infty, \quad z \in \Omega_k. \quad (39)$$



**Рис. 7.** Двумерная модель двухкомпонентного тела со слабо искривлённой границей

Для каждой среды  $\Omega_k$  ( $k = 1, 2$ ) вектор напряжений и вектор перемещений связаны с комплексными потенциалами Гурса — Колосова соотношениями, аналогичными равенствам (5) — (6) [3].

По аналогии с главой 2, используя метод возмущения границы, функции  $\Phi_k$ ,  $\Upsilon_k$  и  $\sigma^s$  представляем в виде степенных рядов по  $\varepsilon$ , а их значения на границе — раскладываем в ряды Тейлора. Подставляя напряжения и перемещения, выраженные через комплексные потенциалы, в граничные условия (38) и учитывая разложения функций по малому параметру, приходим к двум бесконечным последовательностям краевых условий [13]:

$$\left(\Upsilon_{1n}(x_1) + \Phi_{2n}(x_1)\right)^+ - \left(\Phi_{1n}(x_1) + \Upsilon_{2n}(x_1)\right)^- = F_{1n} + i\sigma_n^{s'}(x_1) - T_n^s, \quad (40)$$

$$\left(\mu_2 \Upsilon_{1n}(x_1) - \mu_1 \varkappa_2 \Phi_{2n}(x_1)\right)^+ - \left(\mu_1 \Upsilon_{2n}(x_1) - \mu_2 \varkappa_1 \Phi_{1n}(x_1)\right)^- = F_{2n}, \quad (41)$$

где  $T_n^s$ ,  $F_{kn}$  ( $k = 1, 2$ ) — функции, зависящие от предыдущих приближений.

Решение задач (40) — (41), согласно [3], имеет вид:

$$\begin{cases} \Upsilon_{1n}(z) = \frac{\mu_1 \varkappa_2 I_n(z) + J_n(z)}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} + a_{1n}^2, & \text{Im } z > 0, \\ \Phi_{1n}(z) = \frac{\mu_1 I_n(z) - J_n(z)}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1} + a_{1n}^1, & \text{Im } z < 0, \\ \Phi_{2n}(z) = -\Phi_{1n}(z) + I_n(z) + C_n, & \text{Im } z > 0, \\ \Upsilon_{2n}(z) = -\Upsilon_{1n}(z) + I_n(z) + C_n, & \text{Im } z < 0, \end{cases} \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} I_n(z) &= I_{nk} + I_{nu}, & I_{nk} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{1n}(t) - T_n^s(t)}{t - z} dt, \\ I_{nu} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\sigma_n^{s'}(t)}{t - z} dt, & J_n(z) &= J_{nk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{2n}(t)}{t - z} dt, \end{aligned} \quad (43)$$

$$a_{10}^j = a_1^j, \quad C_0 = a_1^j + a_2^j, \quad a_{1n}^j = C_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (-1)^j \text{Im } z > 0.$$

Аналогично методу, описанному во второй главе, из условия идеального контакта и определяющих соотношений поверхностной и объёмной теорий

упругости получено уравнение, связывающее  $n$ -ое приближение искомого межфазного напряжения  $\sigma_n^s$  с компонентой объёмной деформации. С учётом разложений функций по малому параметру приходим к последовательности уравнений, аналогичных уравнениям (31)

$$\sigma_n^s(x_1) - M \operatorname{Re} \left\{ \varkappa_1 \Phi_{1n}^-(x_1) + \Upsilon_{1n}^+(x_1) \right\} = V_n(x_1), \quad M = \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{2\mu_1}, \quad (44)$$

где функции  $V_n$  зависят только от предыдущих приближений. Приводятся явные выражения для функций  $F_{kn}$  ( $k = 1, 2$ ) и  $V_n$  при любом  $n$ .

После дифференцирования данного уравнения с учётом формул Сохоцкого — Племеля получаем бесконечную последовательность гиперсингулярных интегральных уравнений относительно производной неизвестного межфазного напряжения  $\sigma_n^{s'}$

$$\begin{aligned} \sigma_n^{s'}(x_1) - MK_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_n^{s'}(t)}{(t-x_1)^2} dt = M \operatorname{Re} \left\{ \frac{K_2}{2} [F_{1n}'(x_1) - T_n^{s'}(x_1)] + \right. \\ \left. + \frac{K_1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{1n}(t) - T_n^s}{(t-x_1)^2} dt + \frac{K_3}{2} F_{2n}'(x_1) + \frac{K_4}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{2n}(t)}{(t-x_1)^2} dt \right\} + V_n', \quad (45) \end{aligned}$$

где постоянные  $K_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) зависят от модулей упругости нижней и верхней областей.

Нужно отметить, что уравнение (45) по типу совпадает с уравнениями (11) и (32), полученными в первой и второй главе. Эти уравнения отличаются только правыми частями. Кроме того, как и уравнения (11) и (32), уравнение (45) получено без использования свойства периодичности функции  $f(x_1)$ , т. е. оно справедливо для любой формы поверхности.

Решение уравнения (45) и задачи в целом находим в частном случае, когда на бесконечности действуют только продольные напряжения и угол поворота равен нулю,  $\sigma_{11}^{1\infty} \equiv \sigma_1$  и  $\sigma_{11}^{2\infty} \equiv \sigma_2$ . Некоторые численные результаты приведены на рис. 8 и рис. 9.

Как и в главе 2, в  $n$ -м приближении межфазное напряжение ищем в виде

$$\sigma_n^s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_{nk} \cos b_k x + B_{nk} \sin b_k x), \quad (46)$$

где  $b_k = 2\pi k/a$ , здесь и далее обозначено  $x \equiv x_1$ . Функция  $f(x_1)$ , как и в первых двух главах, принята чётной и также раскладывается в ряд Фурье:

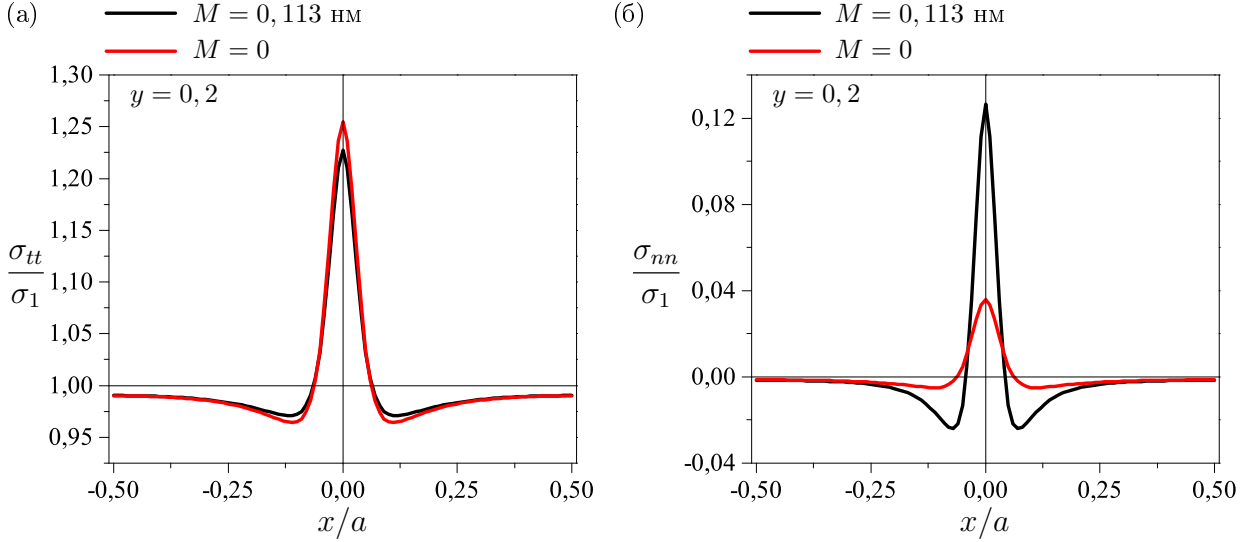
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos b_k x. \quad (47)$$

С использованием свойств интегралов типа Коши, получены выражения для всех коэффициентов в нулевом и первом приближении:

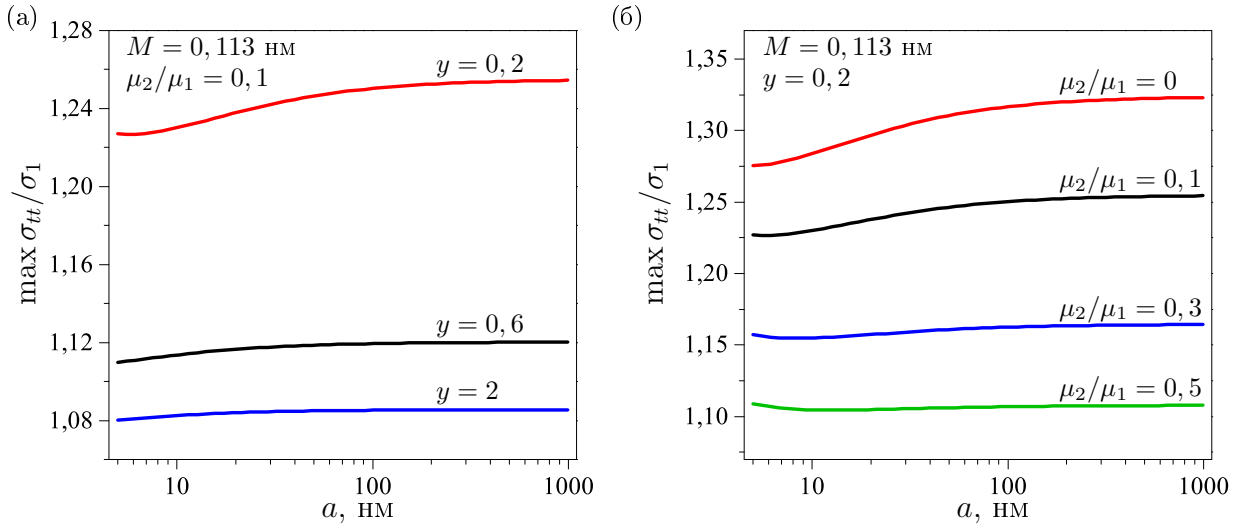
$$A_{00} = \gamma_0 + M(\varkappa_1 + 1) \frac{\sigma_1}{4}, \quad A_{0k} = 0, \quad k \geq 1; \quad B_{0k} = 0, \quad k \geq 0, \quad (48)$$

$$A_{1k} = \frac{Mb_k C_k (K_5 \sigma_1 + K_2 \sigma_0^s b_k)}{2 + Mb_k K_1}; \quad B_{1k} = 0, \quad k \geq 0, \quad (49)$$

где  $K_i$  ( $i = 1, 2, 5$ ) — постоянные, зависящие от модулей упругости.



**Рис. 8.** Распределение окружных (а) и нормальных (б) напряжений вдоль межфазной границы в пределах одного периода при  $a = 5$  нм



**Рис. 9.** Зависимость максимумов окружных напряжений от периода искривления межфазной поверхности при различных значениях  $y$  (а) и  $\mu_2/\mu_1$  (б)

В результате в первом приближении найдено точное решение интегрального уравнения (45) для периодической формы межфазной поверхности в виде ряда:

$$\sigma^s(\zeta) = \gamma_0 + M(\varkappa_1 + 1) \frac{\sigma_1}{4} + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} A_{1k} \cos b_k x. \quad (50)$$

В качестве примера для описания формы искривления межфазной поверхности взята функция (37). Рассмотрено влияние различных параметров на напряжённое состояние двухкомпонентной плоскости со слабо искривлённой межфазной границей. Как и в главе 2, коэффициент  $M = 0,113$  нм, остаточное напряжение  $\gamma_0$  принято равным нулю, коэффициенты Пуассона обоих материалов равны  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ . Построены графики распределений окружных, касательных и нормальных напряжений для различных форм искривления поверхности при  $\mu_2/\mu_1 = 1/10$  (рис. 8).

На рис. 8 графики демонстрируют такой же эффект, как и на рис. 5. При этом, чем меньше радиус кривизны во впадинах более жёсткого материала, тем сильнее проявляется эффект межфазных напряжений. Это полностью согласуется с аналогичным эффектом, описанным в главе 2 для случая полуплоскости.

Получены графические зависимости максимумов окружных, нормальных



и касательных напряжений от периода искривления поверхности для различных форм искривлений, различных отношений модулей сдвига, а также для различных значений биупругой постоянной  $M$ . Наибольший эффект демонстрируют зависимости, полученные при отсутствии верхней полуплоскости ( $\mu_2 = 0$ ).

На графиках, приведённых на рис. 9, проиллюстрирован размерный эффект — зависимость окружного напряжения от периода искривления межфазной границы  $a$ . Причём чем более острые впадины имеет межфазная поверхность, а также чем больше отличаются модули упругости материалов, тем сильнее влияние межфазных напряжений. Этот эффект практически исчезает при  $a > 100$  нм.

**В заключении** сформулированы основные результаты работы:

- Решены задачи определения напряжённо-деформированного состояния полуплоскости с прямолинейной и со слабо искривлённой границей при действии поверхностных напряжений, а также двухкомпонентной плоскости со слабо искривлённой межфазной границей, на которой действуют межфазные напряжения.
- В общем случае построены однотипные гиперсингулярные интегральные уравнения, к которым сведено решение всех трёх задач.
- Для случая периодических усилий, действующих на прямолинейной границе полуплоскости, построено точное решение интегрального уравнения в виде рядов Фурье.
- В случае слабо искривлённой границы полуплоскости и слабо искривлённой межфазной границы при помощи метода возмущений выведены соотношения, которые позволяют найти решение в любом приближении. Для периодической формы границ в первом приближении найдено точное решение соответствующего интегрального уравнения в виде рядов Фурье.
- Обнаружен размерный эффект — зависимость напряжённого состояния от периода изменения нагрузки в первой задаче и периода искривления формы соответствующей поверхности во второй и третьей задачах.
- Проанализирована степень влияния поверхностных напряжений на напряжённое состояние границы в зависимости от характера изменения внешних усилий в первой задаче, а также от формы искривления поверхности во второй и третьей задачах. В результате выявлен следующий эффект: чем более резкое изменение нагрузки или чем меньше радиус кривизны искривления границы, тем сильнее проявляется влияние поверхностных напряжений.
- Рассмотрено влияние относительной жёсткости материалов на напряжённое состояние тела при учёте поверхностных и межфазных напряжений и обнаружено, что чем больше отличаются модули упругости материалов, тем сильнее проявляется эффект поверхностных напряжений.
- Установлено, что во всех рассмотренных случаях влиянием поверхностных и межфазных напряжений можно пренебречь, если период  $a > 100$  нм.

## **Публикации.**

### **Статьи в журналах, рекомендованных ВАК РФ:**

1. Викулина Ю. И., Греков М. А., Костырко С. А. Модель пленочного покрытия со слабо искривленной поверхностью // Известия РАН. МТТ, 2010. № 6. С. 16–28.
2. Викулина Ю. И., Греков М. А. Напряженное состояние плоской поверхности упругого тела нанометрового размера при периодическом силовом воздействии // Вестник С-Петербур. ун-та. Серия 1, 2012. №4. С. 72–80.

### **Статьи в других изданиях:**

3. Викулина Ю. И. Влияние формы поверхности на напряженное состояние тела нанометрового размера // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й междунар. научн. конф. аспирантов и студентов. / Под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2013. С. 165–170.
4. Grekov M.A., Vikulina Yu.I. Effect of a type of loading on stresses at a planar boundary of a nanomaterial. // Surface Effects in Solid Mechanics. Advanced Structured Materials. Eds. H. Altenbach and N.F. Morozov. Berlin: Springer, 2013. V. 30. P. 69–79.
5. Викулина Ю.И., Греков М.А., Костырко С.А. Напряженно-деформированное состояние упругого тела со слабо искривленной поверхностью при учете поверхностного напряжения // Процессы управления и устойчивость: Труды 43-й междунар. научн. конф. аспирантов и студентов. СПб, 2012. С. 112–118.
6. Викулина Ю.И., Греков М.А. Напряженное состояние полуплоскости при учете поверхностного напряжения // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й междунар. научн. конф. аспирантов и студентов. СПб, 2011. С. 109–114.
7. Костырко С.А., Викулина Ю.И. Напряженное состояние поверхностного слоя переменной толщины // Труды ХLI междунар. научн. конф. аспирантов и студентов. «Процессы управления и устойчивость». СПб, 2010. С. 176–182.

### **Тезисы докладов на конференциях:**

8. Викулина Ю.И., Греков М.А., Костырко С.А. Влияние дефектов поверхности нанометрового размера на напряженное состояние упругого тела // Тезисы докл. Междунар. научн. конф. «Совр. проблемы мех. деф. тв. тела, дифф. и интегр. уравнений». Одесса: «Астропринт», 2013. С. 38.
9. Викулина Ю.И., Греков М.А. Напряженное состояние плоской поверхности наноматериала при периодическом силовом воздействии // Шестые Поляховские чтения. Тезисы докл. Междунар. научн. конф. по механике. Москва, 2012. С. 304.
10. Grekov M.A., Vikulina Yu.I. Effect of a type of loading on the surface stress at a plane boundary of a solid // 8th Europ. Solid Mech. Conf.: Book of Abstracts / G.A. Holzapfel and R.W. Ogden (Eds) / [CD] / GS-MP. Graz, Austria, 2012.
11. Grekov M.A., Kostyrko S.A., Vikulina Yu.I. Effect of surface stress in the case of a curvilinear interface between elastic materials // XXI Петербургские чтения по проблемам прочности. К 100-летию со дня рождения Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова.: сборник материалов. СПб.: Соло, 2014. С. 272–274.

### Список цитируемой литературы

1. *Gurtin M. E., Murdoch A. I.* A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Ration. Mech. Anal., 1975. Vol. 57. № 4. P. 291–323.
2. *Греков М.А., Костырко С.А.* Потеря устойчивости плоской формы пленочного покрытия при поверхностной диффузии // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10, 2007. Вып. 1. С. 46–54.
3. *Греков М.А.* Сингулярная плоская задача теории упругости. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2001. 192 с.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
5. *Miller R.E., Shenoy V.B.* Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements // Nanotechnology, 2000. Vol. 11. P. 139–147.
6. *Andrews A.M., Speck J.S., Romanov A.E., Bobeth M., Pompe W.* Modeling cross-hatch surface morphology in growing mismatched layers // J. Appl. Phys., 2002. V. 91. No. 4. P. 1933–1943.
7. *Викулина Ю.И.* Влияние формы поверхности на напряженное состояние тела нанометрового размера // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й междуна. научн. конф. асп. и студ. / Под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. СПб.: Издат. Дом С.-Петербур. гос. ун-та, 2013. С. 165–170.
8. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
9. *Греков М. А., Макаров С. Н.* Концентрация напряжений у слабо искривленного участка поверхности упругого тела // Изв. РАН. МТТ, 2004. № 6. С. 53–61.
10. *Duan H. L., Wang J., Karimhaloo B.L.* Theory of elasticity at the nanoscale // Advances in Applied Mechanics, 2009. № 42. P. 1–68.
11. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б.* Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Физическая мезомеханика, 2010. Т. 13. № 5. С. 127–138.
12. *Tian L., Rajapakse R.K.N.D.* Elastic field of an isotropic matrix with a nanoscale elliptical inhomogeneity // Int. J. Solids and Structures, 2007. V. 44. № 24. P. 7988–8005.
13. *Греков М. А.* Метод возмущений в задаче о деформации двухкомпонентного композита со слабо искривленной границей раздела // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1, 2004. Вып. 1. С. 81–88.